【2005 年度東京大学前期入試問題】

3 以上 9999 以下の奇数 a で，a^2-a が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ．

設問のポイント

整数問題であるが，本質的には不定方程式に帰着されるもの．中学生には少々難しいだろうが，算数でも次のような問題は扱ったことがあるだろう（特に中学受験をした人ならあたり前？）．

(問題）37 人に 962 個のビー玉全部を次のように配ります．くじで当たった 7 人には，A 個ずつ，はずれた 30 人には B 個ずつとします．ただし，A の方が B よりも大きいとします．A と B にあてはまる数の組をすべて求めなさい．　(03 年度　武蔵中学入試問題)

これを式で表すと

$$7A+30B=962,\ A>B$$

となるので，これをみたす A, B を求めることになり，これが不定方程式というわけ．

さて，この東大の問題の場合は，不定方程式にする前に，整数としての考察が入り，少し複雑になっている．まず，a^2-a が 10000 で割り切れるための条件を考えるのだから，約数・倍数の関係を利用する．つまり，$a^2-a=a(a-1)$，$10000=2^4\cdot5^4$ と変形し，これと

$$a,\ a-1 \text{ が互いに素},\ a \text{ が奇数}$$

に着目して

$$a=5^4m,\ a-1=2^4n \qquad (m,\ n \text{ は整数})$$

と表すことが第一歩である．

あとは，$3 \leqq a \leqq 9999$ より，m，n のとり得る値の範囲が絞れるので，1 つずつ調べていく方法も考えられるが，a を消去すれば，1 次不定方程式 $pm+qn=1$ の解を求める問題に帰着される．

解答

$a^2-a=a(a-1)$ において a，$a-1$ が互いに素 (最大公約数が 1) で，a が奇数のとき，$a-1$ は偶数であるから，$a(a-1)$ が $10000=2^4\cdot5^4$ の倍数となるのは，$a-1$ が 2^4 の倍数のときである．また，a，$a-1$ のいずれかが 5^4 の倍数であるが，$a-1$ が 5^4 の倍数とすると，$a-1$ が $2^4\cdot5^4$ の倍数となり，これは $3 \leqq a \leqq 9999$ に反する．したがって，a が 5^4 の倍数であり，整数 m，n を用いて

$$a=5^4m,\ a-1=2^4n \qquad \cdots\cdots ①$$

と表せる．

① より a を消去すると

$$5^4m-2^4n=1 \quad \Longleftrightarrow \quad 5^4(m-1)=2^4(n-39)$$

となり，5^4 と 2^4 は互いに素であるから，$m-1$ は 2^4 の倍数である．よって，整数 k を用いて

$$m-1=2^4k,\ n-39=5^4k \quad\Longleftrightarrow\quad m=2^4k+1,\ n=5^4k+39$$

とおけて，① をみたす奇数 a は整数 k を用いて

$$\begin{aligned} a &= 5^4\cdot 2^4k+5^4\ (=2^4\cdot 5^4k+39\cdot 2^4+1) \\ &= 10000k+625 \end{aligned}$$

これが 3 以上 9999 以下である条件は $k=0$ に限るので，求める a は

$$a=625 \qquad (\textbf{答})$$

である．

解説

(A)「解答」では，変数 m，n に関する 1 次不定方程式

$$5^4m-2^4n=1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

の解として，$(m,n)=(1,39)$ を 1 組見つけて

$$5^4\cdot 1-2^4\cdot 39=1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

が成り立つことから，② − ③ として

$$5^4(m-1)-2^4(n-39)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad 5^4(m-1)=2^4(n-39)$$

と変形した．これは，1 次不定方程式の定石的解法といえる．

なお，予備知識がなければ，② を n について解いて

$$n=\frac{625m-1}{16}=39m+\frac{m-1}{16}$$

これが整数となる条件，すなわち，$m-1$ が 16 の倍数であることから

$$m-1=16k \quad (k\text{ は整数})$$

と表してもよい．

(B) $3\leqq a\leqq 9999$ および ① より

$$3\leqq 625m\leqq 9999 \qquad \therefore\ 1\leqq m\leqq 15$$

であり，m は奇数なので

$$m=1,3,5,7,9,11,13,15$$

と値の範囲を絞ることができる．これをもとに，① をみたす a の存在を 1 つずつ調べると次の表のようになる．

m	a	$a-1$ を 16 で割った余り
1	625	0
3	1875	2
5	3125	4
7	4375	6
9	5625	8
11	6875	10
13	8125	12
15	9375	14

また，一工夫するなら

$$a = 625m = 16 \cdot 39m + m$$

より

$$(a-1 \text{ を 16 で割った余り}) = (m-1 \text{ を 16 で割った余り})$$

に着目して，$m=1$ のときだけ条件をみたすことを述べてもよい．

研究

変数 x，y に関する 1 次不定方程式

$$ax + by = c \quad (a, b, c \text{ は整数で}, ab \neq 0)$$

が整数解をもつための必要十分条件は

c が a, b の最大公約数の倍数であること　…………………… ④

であり，その特別な場合として

a, b が互いに素であるとき, $ax + by = 1$ をみたす整数 x, y が存在すること　…………………… ⑤

が知られている (本問では，5^4，2^4 が互いに素であるから，整数解をもつ)．

⑤ については，ユークリッドの互除法の原理，すなわち

> a，b が $a > b$ である自然数のとき，a を b で割った商を q，余りを r とすると，a，b の最大公約数は b，r の最大公約数に等しい

によれば，特殊解が得られてほぼ自明であることがわかるが，ここでは，別の方法で示しておこう．

まず，a，$2a$，$3a$，$\cdots$，ba の b 個の整数を b で割った余りはすべて異なることを証明する．

ka，la $(1 \leqq l < k \leqq b)$ を b で割った余りが等しいとすると

$ka - la = (k-l)a$ が b で割り切れる

ことになるが，$0 < k-l < b$ で，a, b は互いに素であるから矛盾する．したがって，a，$2a$，$3a$，$\cdots$，ba の b 個の整数を b で割った余りはすべて異なり

$$0, 1, \cdots, b-1$$

が 1 度ずつ現れる．ゆえに，余りが 1 となるものがあるので，ax を b で割った余りが 1 とすると

$$ax = by' + 1$$

をみたす整数 y' が存在して，$y' = -y$ とすると

$$ax + by = 1$$

が成り立つ．すなわち，与式をみたす整数 x, y は存在する．

なお，⑤ から，④ の証明や

a, b が互いに素な整数であるとき，任意の整数は $ax + by$ の形で表すことができる

がいえる．各自確かめよ．