YMCRMA-Z1C4-01

問題

次の各問いに答えよ。ただし，対数は自然対数とする。（25 点）

(1)　$x>1$ のとき，$\log x<\sqrt{x}$ が成り立つことを示し，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$ を求めよ。

（12 点）

(2)　3 つの正の数 a，b，c が

$$a^{bc}=b^{ca}=c^{ab}$$

をみたすとき，a，b，c のうち少なくとも 2 つは等しいことを示せ。（13 点）

ポイント

微分法の応用からの出題で，方程式の実数解条件に帰着させるタイプの問題である。(2)で，(1)をどのように利用するかを考えることがポイントといえる。

(1)　前半の不等式の証明では

(右辺)−(左辺)

の増減を調べればよい。後半については，不定形が解消できないので，**前半の不等式を利用して，ハサミウチの原理を用いる。（◀ 1）**

(2)　与えられた条件式のままでは考察しにくいので，同値変形する。(1)で極限値を求めた意味を考えると**各辺の自然対数をとるという方針（◀ 2）**が立てられるだろう。

解　答

(1)　$f(x)=\sqrt{x}-\log x\ (x>1)$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$$

◀ $f(x)=$（右辺）$-$（左辺）

であり，$f(x)$ の増減は右表のようになる。よって，$f(x)$ は $x=4$ のとき極小かつ最小となるので，$e>2$ より

x	1		4	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	極小	↗

$$f(x)\geqq f(4)$$
$$=2(1-\log 2)>0$$

◀ $\log 2<\log e=1$

$$\log x<\sqrt{x}\quad\cdots\cdots①$$

となる。（証終）

次に，① の両辺を x で割ると

$$0<\frac{\log x}{x}<\frac{1}{\sqrt{x}}$$

したがって，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ であるから，ハサミウチの原理より

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$$ 答

◀ 1
ハサミウチの原理を用いるために，① の不等式を用いて $\dfrac{\log x}{x}$ を評価（不等式ではさむ）する。

(2)　$a>0$，$b>0$，$c>0$ より $a^{bc}=b^{ca}=c^{ab}$ において，各辺の対数をとると

$$bc\log a=ca\log b=ab\log c$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\log a}{a} = \frac{\log b}{b} = \frac{\log c}{c} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

となるので，$g(x) = \dfrac{\log x}{x}$ とおき，$g(x) = k$（k は実数の定数）の実数解の個数について考察する。すると

$$g'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

であるから，$x > 0$ における $g(x)$ の増減は右下表のようになる。

また，(1)より

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

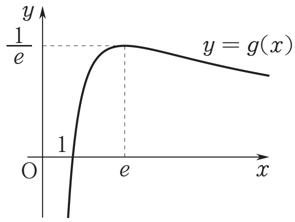
であり

x	0		e	
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘

$$\lim_{x\to+0} g(x) = \lim_{x\to+0} \frac{\log x}{x} = -\infty$$

となるから，$y = g(x)$ のグラフは右下図のようになる。

グラフより，方程式 $g(x) = k$ の実数解の個数は



$k > \dfrac{1}{e}$ のとき，0 個

$k \leqq 0$，$k = \dfrac{1}{e}$ とき，1 個

$0 < k < \dfrac{1}{e}$ のとき，2 個

となり，高々 2 個しかない。

したがって，$a^{bc} = b^{ca} = c^{ab}$，すなわち ② が成り立つとき，a，b，c のうち少なくとも 2 つは等しい。（証終）

◀このように
　文字を分離する
ことを考え，方程式の実数解条件に帰着させるのがポイント。

◀方程式 $g(x) = k$ の実数解の個数は
　$y = g(x)$ のグラフと
　直線 $y = k$ の共有点の個数
と一致する。

解　説

補足 **(1)発散速度と極限**

(1)で示した

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

は大変重要な関係式であり，問題によってはこの関係式を証明せずに用いてもよいと断られているものもある。これは

“$\log x$ の発散速度は，x の発散速度に比べてはるかに遅いこと”

を意味する。

また，$t = \log x$ とおくと，$x = e^t$ であるから

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^t} = 0 \text{ すなわち } \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

が成り立つ。これも重要な関係式であり，これは

“e^x の発散速度は，x の発散速度に比べてはるかに速いこと”

を意味している。

これらのことは，$y = e^x$，$y = x$，$y = \log x$ のグラフからも直観的にわかるだろう。

極　意

・頻出の関数のグラフを活用せよ。

入試では

$$y=\frac{\log x}{x},\ y=x\log x,\ y=x^{\frac{1}{x}},\ y=e^x+e^{-x},$$

$$y=x+\frac{1}{x},\ y=\frac{1}{1+x^2},\ y=\frac{x}{1+x^2},$$

$$y=ax+\sqrt{b-x^2},\ y=x^ae^{bx},\ y=e^{ax}\sin bx\ (a,\ b\text{ は定数})$$

など問題の題材になりやすい関数がある。この他，$y=\dfrac{\log(x+1)}{x}$，$y=\dfrac{(\log x)^n}{x}$ のようなバリエーションもあり，これらの関数の増減やグラフはすぐに書けるようにしておこう。

本問で扱った関数 $y=\dfrac{\log x}{x}$ は頻出であり，類題の経験があるかどうかで(2)の方針の立てやすさが変わってくる。次の例のように過去いろいろな大学で出題されており，ここでは小問による誘導がない一橋大（後期）の問題を紹介しておこう。

（例）e^π と π^e の大小を比較せよ。（2013　一橋大）

（解答）$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ $(x>0)$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$$

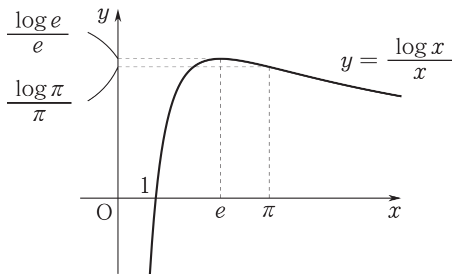
であるから，$x>0$ における $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	(0)		e	
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	極大	↘

また

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0,\ \lim_{x\to+0}f(x)=-\infty$$

となるから，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



よって，$f(x)$ は $x\geqq e$ で単調に減少する関数であるから，$e<\pi$ より

$$f(e)>f(\pi)$$

$$\frac{\log e}{e}>\frac{\log\pi}{\pi}$$

が成り立ち，両辺に $e\pi$ をかけて

$$\pi\log e>e\log\pi \qquad \therefore\quad e^\pi>\pi^e$$