ZMFLA1-Z1A2-01　数 学

2

正しくつくられた硬貨を投げて，次の規則で点を得るゲームを行う。

「l 回目の得点 X_l は投げた硬貨が表なら $\dfrac{1}{2^l}$，裏なら 0 」

n 回目までの得点の和 $X_1+X_2+\cdots+X_n$ を S_n とおく。　(50 点)

(1)　$S_5 \leqq \dfrac{1}{3}$ となる確率を求めよ。　(25 点)

(2)　$S_{2n} \leqq \dfrac{1}{3}$ となる確率を求めよ。　(25 点)

2 ZMFMA1-Z1C2

(1) 2 18/25

(2) 3 15/25

(1) 5回とも表が出たと考えると

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}$$

$$=\frac{2^4+2^3+2^2+2+1}{2^5}$$

$$S_5 \leqq \frac{1}{3}=\frac{11}{33}<\frac{11}{32}$$

範囲を広げてしまっているので $\frac{1}{3}-\frac{10}{32}=\frac{32-30}{96}>0$ として、$\frac{10}{32}$ と $\frac{1}{3}$ を比べたことも示しましょう。

従って分子の和が10以下ならばよい。

$2^4, 2^3, 2^2, 2, 1$ を組み合わせて1から31までの数字が作れるので

どれも使わない場合0となるので0から31までの数字がつくれます

題意をみたすのは1から10までの10通り

全て裏が出るときも合わせるので11通りですね

$$\therefore \frac{10}{32}=\frac{5}{16} \quad //$$

-7

2進法のしくみが理解できていると感じられますが答案にはそうなることを説明しておくとよいでしょう

1	=1
2	=2
1+2	=3
2^2	=4
$1+2^2$	=5
$2+2^2$	=6
$1+2+2^2$	=7
⋮	⋮

というように順にそれぞれの数を含むか含まないかを考えると $2^5=32$ 通りになるので0から31までの数字が作れる

(2) 全て表ならば

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{2^{2n}}$$

$$=\frac{2^{2n-1}+2^{2n-2}+\cdots+2+1}{2^{2n}}$$

(1)と同様に考えて1から $(2^{2n}-1)$ まで作れる。

$\frac{2^{2n}}{3}\geqq k$ （kは整数）で最大の k を考える。

2^{2n} の前後で3の倍数になるのは $2^{2n}-1$, $2^{2n}+2$

よって分子の和は $\frac{2^{2n}-1}{3}$ 以下ならばよい。

$$\therefore \frac{\frac{2^{2n}-1}{3}}{2^{2n}}=\frac{2^{2n}-1}{3\cdot 2^{2n}} \quad //$$

(2)では3の倍数をみつけるのがポイントです。

を考えた根拠を示しましょう。

$$2^{2n}=4^n=(3+1)^n$$
$$\equiv 1 \pmod 3$$

従って 2^{2n} に最も近い3の倍数は $2^{2n}-1$

$$\frac{2^{2n}}{3}>\frac{2^{2n}-1}{3}$$

$$\therefore k=\frac{2^{2n}-1}{3}$$

(1)と同様に全て裏が出るときも考えるので題意をみたす確率は

$$\frac{\frac{2^{2n}-1}{3}+1}{2^{2n}}=\frac{2^{2n}+2}{3\cdot 2^{2n}}$$

-10

答案CHECK!!

- ☑ 設定や試行を理解できた
- □ 正確に処理できた
- □ 解答の意図を伝えられた

↑ よくできているものには☑がつくよ。

ZMFLA1-Z1C2-01

2　問題

正しくつくられた硬貨を投げて，次の規則で点を得るゲームを行う。

「l 回目の得点 X_l は投げた硬貨が表なら $\frac{1}{2^l}$，裏なら 0」

n 回目までの得点の和 $X_1+X_2+\cdots+X_n$ を S_n とおく。　(50 点)

(1)　$S_5 \leqq \frac{1}{3}$ となる確率を求めよ。　(25 点)

(2)　$S_{2n} \leqq \frac{1}{3}$ となる確率を求めよ。　(25 点)

ポイント

X_l は投げた硬貨が表なら $\frac{1}{2^l}$，裏なら 0 なので

$$a_l=\begin{cases}1\ (l\text{ 回目に投げた硬貨が表のとき})\\0\ (l\text{ 回目に投げた硬貨が裏のとき})\end{cases}$$

とすると，$X_l=\frac{a_l}{2^l}$ と書ける。したがって，(1)では

$$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\frac{a_4}{2^4}+\frac{a_5}{2^5} \leqq \frac{1}{3}$$

をみたす a_1，a_2，…，a_5 の組の数を数えることが目標となる。数え上げる際には，条件をみたす値の組を闇雲に書き出すのではなく，**a_1，a_2，… の値を順にどのように決めれば条件をみたすかを押さえながら（◀1）**数えていこう。

(2)でも，**(1)における a_1，a_2，…，a_5 の値の決まり方（◀2）**を手がかりにして考えよう。

解　答

(1)　X_l は投げた硬貨が表なら $\frac{1}{2^l}$，裏なら 0 なので

$$a_l=\begin{cases}1\ (l\text{ 回目に投げた硬貨が表のとき})\\0\ (l\text{ 回目に投げた硬貨が裏のとき})\end{cases}$$

とすると，S_n は

$$S_n=\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}$$

と表すことができる。そこで

$$S_5=\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_5}{2^5} \leqq \frac{1}{3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

をみたす a_1，a_2，…，a_5 の組を考える。

$a_1=1$ のとき，$S_5 \geqq \frac{1}{2}$ となり①をみたさないので，$a_1=0$ が必要である。

◀1
a_1 の値から順に調べる。

(i)　$a_2=0$ のとき

$$S_5 \leqq \frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}=\frac{7}{32}<\frac{1}{3}$$

◀ $S_5=\frac{a_3}{2^3}+\frac{a_4}{2^4}+\frac{a_5}{2^5}$ の最大値を考える。

より，a_3，a_4，a_5 の値によらず①は成立する。このとき，①をみたす a_3，a_4，a_5 の値の組は $2^3=8$ 通りあるので，この確率は

$$\frac{8}{2^5}=\frac{1}{4}$$

(ii)　$a_2=1$ のとき

$$S_5=\frac{1}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\frac{a_4}{2^4}+\frac{a_5}{2^5}$$

である。ここで，$a_3=1$ とすると

$$S_5 \geqq \frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}=\frac{3}{8}>\frac{1}{3}$$

となり，①をみたさないので，$a_3=0$ が必要であり

$$S_5=\frac{1}{2^2}+\frac{a_4}{2^4}+\frac{a_5}{2^5}$$

◀ S_5
$=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{a_4}{2^4}+\frac{a_5}{2^5}$
の最小値を考える。

(ア)　$a_4=0$ のとき

$$S_5 \leqq \frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^5}=\frac{9}{32}<\frac{1}{3}$$

◀ $S_5=\frac{1}{2^2}+\frac{a_5}{2^5}$
の最大値を考える。

であるから，a_5 の値によらず①は成立する。このとき，①をみたす a_5 の値は 2 通りあるので，この確率は

$$\frac{2}{2^5}=\frac{1}{16}$$

(イ)　$a_4=1$ のとき，$a_5=1$ とすると

$$S_5=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}=\frac{11}{32}>\frac{1}{3}$$

となり①をみたさない。一方，$a_5=0$ とすると

$$S_5=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}=\frac{5}{16}<\frac{1}{3}$$

となり①をみたす。このような a_1，a_2，…，a_5 の値の組は 1 通りなので，この確率は

$$\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$$

(i)，(ii)(ア)，(ii)(イ)は排反なので，以上より，求める確率は

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\mathbf{\frac{11}{32}}$$ 答

(2)　k は $2 \leqq k \leqq n-1$ をみたす自然数とする。$a_1=0$，$a_2=1$，$a_3=0$，…，$a_{2k-3}=0$，$a_{2k-2}=1$ のとき，$a_{2k-1}=1$ とすると

$$S_{2n} \geqq \frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{2k-2}}+\frac{1}{2^{2k-1}}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\frac{1}{4^{k-1}}}{1-\frac{1}{4}}+\frac{1}{2\cdot 4^{k-1}}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{6\cdot 4^{k-1}}>\frac{1}{3}$$

◀2
$\{a_n\}$ の初項から第 $2k-2$ 項のうち
（偶数項）$=1$
（奇数項）$=0$
の場合である。

◀初項が $\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$，公比が $\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$ の等比数列の和。

となり，$S_{2n} \leqq \frac{1}{3}$ をみたさない。よって，$a_{2k-1}=0$ が必要である。ここで，$a_{2k}=0$ とすると

◀1 が連続しないことを示した。

ZMFLA1-Z1C2-03

$$S_{2n}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{2k-2}}+\frac{a_{2k+1}}{2^{2k+1}}+\frac{a_{2k+2}}{2^{2k+2}}+\cdots+\frac{a_{2n}}{2^{2n}}$$

$$\leqq\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{2k-2}}\right)+\left(\frac{1}{2^{2k+1}}+\frac{1}{2^{2k+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{2n}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\frac{1}{4^{k-1}}}{1-\frac{1}{4}}+\frac{1}{2^{2k+1}}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{2n-2k}}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 4^k}-\frac{1}{2^{2n}}<\frac{1}{3}$$

◀2 番目の（　）内は，初項が $\frac{1}{2^{2k+1}}$，公比が $\frac{1}{2}$，項数が $2n-2k$ の等比数列の和。

となり，a_{2k+1}，a_{2k+2}，$\cdots$，a_{2n} の値によらず $S_{2n}\leqq\frac{1}{3}$ は成立する。

よって，$a_1=0$，$a_2=1$，$\cdots$，$a_{2k-2}=1$，$a_{2k-1}=0$，$a_{2k}=0$ のとき，$S_{2n}\leqq\frac{1}{3}$ をみたす a_{2k+1}，$\cdots$，a_{2n} の値の組は $2^{2n-(2k+1)+1}=2^{2n-2k}$ 通りあるので，この確率 p_k は

$$p_k=\frac{2^{2n-2k}}{2^{2n}}=\frac{1}{4^k}\quad(k=2,\ 3,\ \cdots,\ n-1)$$

また，これは $k=1$ のときも成り立つ。

◀$k=1$ のとき
$a_1=a_2=0$
であり，a_3，a_4，$\cdots$，a_{2n} の値によらず $S_{2n}\leqq\frac{1}{3}$ は成立するから
$p_1=\frac{2^{2n-2}}{2^{2n}}=\frac{1}{4}$

次に，$k=n$ の場合を考える。$a_1=0$，$a_2=1$，$\cdots$，$a_{2n-2}=1$ とすると，上と同様にして，$a_{2n-1}=0$ となることが必要である。そして，$a_{2n}=0$ のとき $S_{2n}\leqq\frac{1}{3}$ は成立し，また $a_{2n}=1$ のときも $S_{2n}\leqq\frac{1}{3}$ は成立するので，この確率は

$$\frac{2}{2^{2n}}=\frac{2}{4^n}$$

$k=1$，2，$\cdots$，n の場合はそれぞれ排反なので，以上より，求める確率は

$$\sum_{k=1}^{n-1}p_k+\frac{2}{4^n}=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)^k+\frac{2}{4^n}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\frac{1}{4^{n-1}}}{1-\frac{1}{4}}+\frac{2}{4^n}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}+\frac{2}{3\cdot 4^n}}\quad\text{答}$$

◀(2)の解答の冒頭で
$2\leqq k\leqq n-1$
とおいたので形式的に $n\geqq 3$ であるが，得られた答えは $n=1$，2 のときも成り立つ。

解　説

別解　2 進法に直してみると …

S_n を 2 進法で表すと，「**解答**」の場合分けの意味がわかりやすい。S_n，$\frac{1}{3}$ はそれぞれ 2 進法で

$$S_n=0.a_1a_2\cdots a_{n(2)},\quad \frac{1}{3}=0.\dot{0}\dot{1}_{(2)}=0.010101\cdots_{(2)}$$

と表せるので，$S_n\leqq\frac{1}{3}$ すなわち

$$0.a_1a_2\cdots a_{n(2)} \leqq 0.0101\cdots_{(2)}$$

をみたす a_1，a_2，…，a_n の値の組を調べればよい。

(1)　$n=5$ とすると

$$0.a_1a_2a_3a_4a_{5(2)} \leqq 0.010101\cdots_{(2)}$$

なので

〔1°〕$a_1=0$，$a_2=0$

〔2°〕$a_1=0$，$a_2=1$，$a_3=0$，$a_4=0$

〔3°〕$a_1=0$，$a_2=1$，$a_3=0$，$a_4=1$，$a_5=0$

となることが必要十分である。〔1°〕では，a_3，a_4，a_5 のとり方が 2^3 通りあり，〔2°〕では，a_5 のとり方が 2 通りあり，〔1°〕～〔3°〕は互いに排反なので，求める確率は

$$\frac{2^3}{2^5}+\frac{2}{2^5}+\frac{1}{2^5}=\frac{11}{32}$$

(2)　S_{2n} については

$$0.a_1a_2\cdots a_{2n(2)} \leqq 0.010101\cdots_{(2)}$$

なので，上と同様に（$a_k=0$，$a_{k+1}=0$ のとき a_{k+2} 以降は何でもよい）

〔1°〕$a_1=0$，$a_2=0$

〔2°〕$a_1=0$，$a_2=1$，$a_3=0$，$a_4=0$

〔3°〕$a_1=0$，$a_2=1$，$a_3=0$，$a_4=1$，$a_5=0$，$a_6=0$

⋮

〔n°〕$a_1=0$，$a_2=1$，$a_3=0$，$a_4=1$，…，$a_{2n-1}=0$，$a_{2n}=0$

〔$(n+1)$°〕$a_1=0$，$a_2=1$，$a_3=0$，$a_4=1$，…，$a_{2n-1}=0$，$a_{2n}=1$

であることが必要十分である。〔1°〕～〔$(n+1)$°〕は互いに排反なので，求める確率は

$$\frac{2^{2n-2}}{2^{2n}}+\frac{2^{2n-4}}{2^{2n}}+\cdots+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{2^{2n}}=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^n}\right)+\frac{1}{4^n}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3\cdot 4^n}$$

京大の求めるレベル

本問は京大文系で出題される確率の問題として「やや難」レベルである。S_n が何を表しているのかが読み取れず，条件をみたすような表裏の出方を書き出すだけで終わってしまい，思うように得点できなかった人が多いのではないだろうか。

さて，本問は，「**解説**」でも紹介したように，2 進法を背景とした問題である。京大では，確率の分野に限らず，問題の本質を見抜くことでかなり見通しがよくなるものがしばしば出題される。このような問題の見方は試験本番にいきなりできるものではないため，普段の演習から「この式はどんな意味をもっているのだろう」などと考えるよう心がけてほしい。本質を見抜くことはやさしいことではないが，これにより京大合格がぐっと近づくだろう。