添削問題

解答時間　60分

高3京大即応演習 12月 数学

ZMFMK1-Z2A1-01

1

xy 平面上において $(y-x^3+2x)(x-y^3+2y) \geqq 0$ かつ $-\sqrt{3} \leqq x \leqq \sqrt{3}$ をみたす領域を D とおく。領域 D の面積 S を求めよ。　(50 点)

添削問題解答解説

高3京大即応演習 12月 数学

ZMFMK1-Z2C1-01

1 問題

xy 平面上において $(y-x^3+2x)(x-y^3+2y) \geqq 0$ かつ $-\sqrt{3} \leqq x \leqq \sqrt{3}$ をみたす領域を D とおく。領域 D の面積 S を求めよ。 (50 点)

ポイント

S を求めるには，領域 D について $y=x^3-2x$，$x=y^3-2y$ のグラフの概形をかくことが第一歩である。$x=y^3-2y$ を $y=f(x)$ の形に式変形して考察することは難しいので，$y=x^3-2x$，$x=y^3-2y$ の式の形に着目しよう。すなわち，$x=y^3-2y$ のグラフが $y=x^3-2x$ のグラフと直線 $y=x$ に関して対称であることなどを利用して処理したい。

また，$x=y^3-2y$ のグラフと $y=x^3-2x$ のグラフの位置関係について，共有点がわかれば対称性より，予想できるが，この辺りも丁寧に論述しておきたい。

解　答

$(y-x^3+2x)(x-y^3+2y) \geqq 0$ より

$$\begin{cases} y \geqq x^3-2x \\ x \geqq y^3-2y \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y \leqq x^3-2x \\ x \leqq y^3-2y \end{cases}$$

が得られる。

$$\begin{cases} y \geqq x^3-2x \\ x \geqq y^3-2y \end{cases}$$ について考える。

$f(x)=x^3-3x$ とおくと

$$f'(x)=3x^2-2$$

であるから，$f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x		$-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$		$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\dfrac{4\sqrt{6}}{9}$	$\searrow$	$-\dfrac{4\sqrt{6}}{9}$	$\nearrow$

よって，$y=x^3-2x$ のグラフの概形は次の図 1 のようになり，領域 $y \geqq x^3-2x$ は図 1 の斜線部分のようになる。対称性より，$x=y^3-2y$ のグラフは図 2 のようになり，領域 $x \geqq y^3-2y$ は図 2 の斜線部分のようになる。

◀「解説 2」参照。

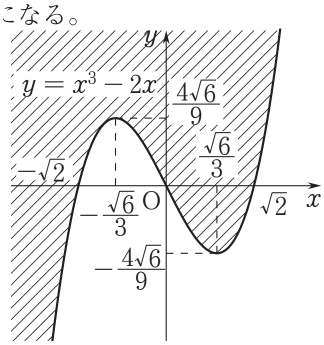

図 1

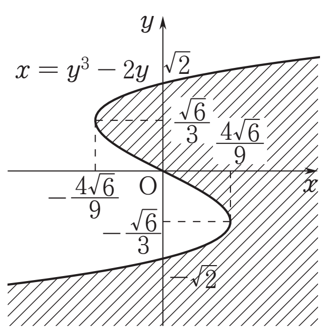

図 2

ここで，2 曲線

$$y = x^3 - 2x \quad \cdots\cdots ①$$

$$x = y^3 - 2y \quad \cdots\cdots ②$$

の共有点の座標を求める。

$(x,\ y) = (0,\ 0)$ は①，②をみたすので，以下，これ以外の場合を考える。

①＋②，②－① より

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2 - 3) = 0 \quad \cdots\cdots ③$$

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 - 1) = 0 \quad \cdots\cdots ④$$

(i)　$y = x$ のとき，$(x,\ y) = (\pm\sqrt{3},\ \pm\sqrt{3})$　（複号同順）

(ii)　$y = -x$ のとき，$(x,\ y) = (\pm 1,\ \mp 1)$　（複号同順）

(iii)　$y \neq \pm x$ のとき，③，④より

$$x^2 - xy + y^2 - 3 = 0,\ x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$$

$$(x + y)^2 - 3xy - 3 = 0,\ (x + y)^2 - xy - 1 = 0$$

$x + y$，xy について解くと

$$xy = -1,\ x + y = 0$$

$$\therefore\quad (x,\ y) = (\pm 1,\ \mp 1)\quad（複号同順）$$

となり，場合分けの条件 $y \neq \pm x$ に反する。

◀対称式であるから，基本対称式 $x+y$，xy に着目して式変形を行った。

次に，第 2 象限における①のグラフと②のグラフの交わり方を調べる。$\mathrm{A}\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{3},\ \dfrac{4\sqrt{6}}{9}\right)$，$\mathrm{B}\left(-\dfrac{4\sqrt{6}}{9},\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ とおくと

$$f\left(-\frac{4\sqrt{6}}{9}\right) = \left(-\frac{4\sqrt{6}}{9}\right)^3 - 2\left(-\frac{4\sqrt{6}}{9}\right) = \frac{88\sqrt{6}}{243}$$

$$\therefore\quad \frac{\sqrt{6}}{3} < f\left(-\frac{4\sqrt{6}}{9}\right)$$

であるから，点 B は①のグラフの下側の点である。そして，第 2 象限における曲線①，②の共有点は $(-1,\ 1)$ のみであるから，対称性より第 2 象限における 2 曲線①，②の位置関係は図 3 のようになる。第 4 象限は第 2 象限と原点対称であるから，グラフ全体は図 4 のようになる。

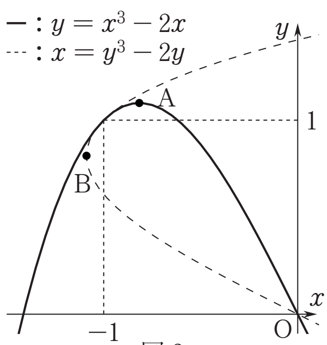

図 3

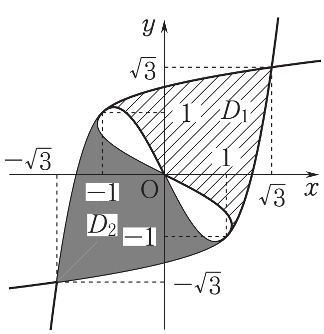

図 4

したがって，$-\sqrt{3} \leqq x \leqq \sqrt{3}$ に注意すると，対称性より求める領域 D は，図 4 の斜線部分 D_1 と網掛け部分 D_2 を合わせた領域となる。ただし，境界はすべて含む。

D_1 は $y=x$ に関して対称なので，$y=x$ の下側の面積を求める。$y=x^3-2x$ $(0 \leqq x \leqq \sqrt{3})$ と $y=x$ で囲まれた部分の面積を S_1，$y=x^3-2x$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ と $y=-x$ で囲まれた部分の面積を S_2，$x=y^3-2y$ $(-1 \leqq y \leqq 0)$ と $y=-x$ で囲まれた部分の面積を S_3 とおく。

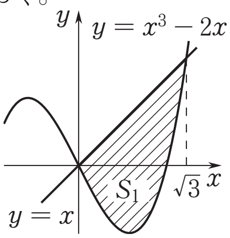

図 5

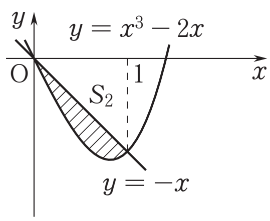

図 6

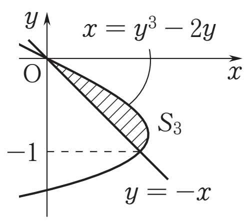

図 7

$$S_1=\int_0^{\sqrt{3}}\{x-(x^3-2x)\}dx=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{3}}=\frac{9}{4}$$

$$S_2=\int_0^{1}\{-x-(x^3-2x)\}dx=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right]_0^{1}=\frac{1}{4}$$

対称性より

$$S_3=S_2=\frac{1}{4}$$

よって

$$S=4(S_1-S_2-S_3)=4\left(\frac{9}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=\mathbf{7}$$ 答

解　説

1 補足 連立方程式 $y=f(x)$ かつ $x=f(y)$ の解法

y を消去すると $x=f(f(x))$ となる。これを解けば解は求められるが，その際，工夫して処理量を減らしたい。$f(x)=x^3-2x$ であるから

$$x=(x^3-2x)^3-2(x^3-2x)$$
$$x^9-6x^7+12x^5-10x^3+3x=0$$
$$x(x^8-6x^6+12x^4-10x^2+3)=0$$

ここで，$x^8-6x^6+12x^4-10x^2+3$ について $t=x^2$ として

$$\begin{aligned}t^4-6t^3+12t^2-10t+3&=(t-1)(t^3-5t^2+7t-3)\\&=(t-1)^2(t^2-4t+3)\\&=(t-1)^3(t-3)\end{aligned}$$

であるから

$$x(x^2-1)^3(x^2-3)=0$$

$x=f(f(x))$ を解く場合の工夫は問題によって様々なので，どの問題にも有効な

$y=f(x)$ と $x=f(y)$ の辺々をひいて得られた式と辺々をたして得られた式を連立する手法を覚えておいてほしい。

2 補足 逆関数の活用

関数 $x=y^3-2y$ は関数 $y=x^3-2x$ の x と y を入れ替えた関数なので，関数 $x=y^3-2y$ を y について解いた関数は関数 $y=x^3-2x$ の逆関数である。

逆関数が題材の問題では，関数 $y=f(x)$ のグラフとその逆関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフが直線 $y=x$ に関して対称であることや $f(f^{-1}(x))=f^{-1}(f(x))=x$ などの性質をうまく活用して処理量を減らしてほしい。

京大の求めるレベル

本問の難度は，京大理系として「やや難」レベルである。S を求めるためには領域 D の概形をかく必要があるが，ここが本問における最大のポイントであった。

面積を求める領域の正確な図をかけたとしても，最低限の説明すら記されていなければ点は与えられないだろう。

文章で記すべき内容は省略せずに文章で記しているか，図で伝わる内容は図を用いて手間を減らせているか，添削指導を復習するなどして最後の確認を行ってほしい。